7/01/2020

Παλινδρόμηση και Ανάλυση Διακύμανσης.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΦΥΛΛΑΔΙΟ.

ΤΕΛΕΥΤΑΙΟ ΜΑΘΗΜΑ

Ασκ 4

$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad i=1,\dots,n$

Νδο α) $r^2_{x,y} = R^2$

β) $r^2_{y,\hat{y}} = R^2 = r^2_{x,y}$.

Λύση

$$R^2 = \frac{SSreg}{SStot} \overset{*}{=} \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{\beta_0} + \hat{\beta}_1 x_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}$$

$$= \frac{\sum(\bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x} + \hat{\beta}_1 X_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2}$$

(*) Έχουμε αποδ. στην Θεωρία ότι $SSreg = \hat{\beta}_1^2 \sum(x_i - \bar{x})^2$ άρα μπορούσα απ' ευθείας.

$$\Rightarrow R^2 \overset{*}{=} \frac{\hat{\beta}_1^2 \sum(X_i - \bar{x})^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2} \quad (1)$$

$$r_{x,y} = \frac{\sum(X_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(X_i-\bar{x})^2\sum(y_i-\bar{y})}}, \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum(X_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(X_i-\bar{x})^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \left[\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{\sum(X_i-\bar{x})^2}\right]^{1/2} r_{x,y} \quad (2)$$

Από (1) και (2)

$$R^2 = \frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{\sum(X_i-\bar{x})^2} r^2_{x,y} \frac{\sum(X_i-\bar{x})^2}{\sum(y_i-\bar{y})^2} \Rightarrow R^2 = r^2_{x,y}.$$

β) $$r_{y,\hat{y}} = \frac{\Sigma(y_i-\bar{y})(\hat{y}_i-\bar{\hat{y}})}{\sqrt{\Sigma(y_i-\bar{y})^2\,\Sigma(\hat{y}_i-\bar{\hat{y}})^2}} \quad (3)$$

Αλλά $$\bar{\hat{y}} = \frac{1}{n}\Sigma\hat{y}_i = \frac{1}{n}\Sigma(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 X_i) = \frac{1}{n}n\hat{\beta}_0 + \frac{1}{n}\hat{\beta}_i X_i$$

$$= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\bar{X} = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{X} + \hat{\beta}_1\bar{X} = \bar{y}$$

$$\Rightarrow \bar{\hat{y}} = \bar{y} \quad (4)$$

Από (3) και (4)

$$r_{y,\hat{y}} = \frac{\Sigma(y_i-\bar{y})(\hat{y}_i-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(y_i-\bar{y})^2\,\Sigma(\hat{y}_i-\bar{y})^2}} = \frac{[\Sigma(y_i-\bar{y})(\hat{y}_i-\bar{y})]^2}{\Sigma(y_i-\bar{y})^2\,\Sigma(\hat{y}_i-\bar{y})^2} \quad (5)$$

▶ $$[\Sigma(y_i-\bar{y})(\hat{y}_i-\bar{y})]^2 = [\Sigma(y_i-\bar{y})(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_i X_i-\bar{y})]^2$$

$$= [\Sigma(y_i-\bar{y})(\bar{x}-\hat{\beta}_1 X+\hat{\beta}_i X_i-\bar{y})]^2 = \hat{\beta}_1^2\,[\Sigma(y_i-\bar{y})(X_i-\bar{x})]^2 \quad (6)$$

▶ $$\Sigma(y_i-\bar{y})^2\,\Sigma(\hat{y}_i-\bar{y})^2 = \Sigma(y_i-\bar{y})^2\,\hat{\beta}_1^2\,\Sigma(X_i-\bar{X})^2 \quad (7)$$

Από (5), (6), (7)

$$r^2_{y,\hat{y}} = \frac{\hat{\beta}_1^2\,[\Sigma(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})]^2}{\Sigma(y_i-\bar{y})\,\hat{\beta}_1^2\,\Sigma(x_i-\bar{x})^2} = \left[\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}}\right]^2 = r^2_{x,y} \overset{(α)}{=} R^2$$

Ασκ 7

Y_1, Y_2 ανεξ. τ.μ.

$E(Y_1)=\theta$ $\quad \theta \in R$

$E(Y_2)=2\theta$

α) Να βρεθεί ΕΕΤ της θ.

β) Να βρεθεί SSres

Λύση

α) Επειδή $E(Y_1)=\theta$, $E(Y_2)=2\theta$ τότε:

ΣΚΕΨΗ

$$E\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\theta$$

$$\rightsquigarrow \underset{\sim}{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\theta + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

με $E(\varepsilon_1) = E(\varepsilon_2) = 0$

Άρα θεωρούμε το γραμμικό μοντέλο

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\theta + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \quad \text{όπου} \quad E(\varepsilon_1) = E(\varepsilon_2) = 0$$

ή

$\underset{\sim}{Y} = X\theta + \underset{\sim}{\varepsilon}$ όπου $\underset{\sim}{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\theta = \beta$, $\underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$

Για το μοντέλο $\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \varepsilon$ γνωρίζω ότι οι ΕΕΤ του $\underset{\sim}{\beta}$ είναι $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{Y}$

Άρα οι ΕΕΤ της θ είναι $\hat{\theta} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{Y}$ όπου

$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\underset{\sim}{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$

Έτσι $\hat{\theta} = \left((1 \;\; 2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)^{-1} (1 \;\; 2) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\hat{\theta} = (5)^{-1}(Y_1 + 2Y_2)$$

Άρα ο ΕΕΤ της θ είναι $\hat{\theta} = \frac{1}{5}(Y_1 + 2Y_2)$

β) $SS_{res} = \underset{\sim}{Y}'\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\beta}' X' \underset{\sim}{Y} \Rightarrow$

$$SS_{res} = Y_1^2 + Y_2^2 - \frac{1}{5}(Y_1 + 2Y_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$

$$= Y_1^2 + Y_2^2 - \frac{1}{5}(Y_1 + 2Y_2)(Y_1 + 2Y_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SS_{res} = Y_1^2 + Y_2^2 - \frac{1}{5}(Y_1 + 2Y_2)^2 .$$

Άσκηση 5 και 6 εκτός

Ασκ 9 $\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$

Θεωρούμε το γενικό μοντέλο με σταθερό όρο

$$\underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & & & \\ 1 & X_{n1} & \cdots & X_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_\ell \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{11} + \ldots + \beta_0 X_{ip} + \varepsilon_i, \; i = 1, \ldots, n$$

Θεωρώ τις κανονικές εξισώσεις που είναι:

$$(X'X)\underset{\sim}{\beta} = X'\underset{\sim}{Y}.$$

Ο ΕΕΤ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$ τις ικανοποιεί (τις κανονικές εξισώσεις)

$$(X'X)\hat{\underset{\sim}{\beta}} = X'\underset{\sim}{Y} \Rightarrow X'\underset{\sim}{Y} - (X'X)\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \underset{\sim}{0}$$

$$\Rightarrow X'(\underset{\sim}{Y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}}) = \underset{\sim}{0}$$

$$\Rightarrow (\underset{\sim}{Y} - X\hat{\underset{\sim}{\beta}})'X = \underset{\sim}{0}'$$

$$\Rightarrow (\underset{\sim}{Y} - \hat{\underset{\sim}{Y}})'X = \underset{\sim}{0}$$

$$\begin{pmatrix} Y_1 - \hat{Y}_1 \\ Y_2 - \hat{Y}_2 \\ \vdots \\ Y_n - \hat{Y}_n \end{pmatrix}' X = \underset{\sim}{0}$$

$$\Rightarrow (Y_1 - \hat{Y}_1, Y_2 - \hat{Y}_2, \ldots, Y_n - \hat{Y}_n) \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & \cdots & X_{1p} \\ 1 & X_{21} & \cdots & X_{2p} \\ \vdots & & & \\ 1 & X_{n1} & \cdots & X_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (Y_1 - \hat{Y}_1)\cdot 1 + (Y_2 - \hat{Y}_2)\cdot 1 + \ldots + (Y_n - \hat{Y}_n)\cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i = 0.$$

Ασκ 10 $\quad \underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$

α) $\sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i (Y_i - \hat{Y}_i) = 0 \qquad$ β) $\sum_{i=1}^{n} Var(\hat{Y}_i) = \sigma^2 (p+1)$

α) $\left[\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i e_i = 0 \Longleftrightarrow \underset{\sim}{\hat{Y}} \perp \underset{\sim}{e} \right]$

Πάλι όπως και στην Ασκ 9 από κανονικές εξισώσεις.

$$(X'X)\hat{\underline{\beta}} = X'\underset{\sim}{Y} \Rightarrow X'\underset{\sim}{Y} - (X'X)\hat{\underline{\beta}} = \underset{\sim}{0}.$$

$$\Rightarrow X'(\underset{\sim}{Y} - X\hat{\underline{\beta}}) = \underset{\sim}{0} \Rightarrow (\underset{\sim}{Y} - X\hat{\underline{\beta}})'X = \underset{\sim}{0}'$$

$$\Rightarrow (\underset{\sim}{Y} - X\hat{\underline{\beta}})'X\hat{\underline{\beta}} = \underset{\sim}{0}'\hat{\underline{\beta}} = 0$$

$$\Rightarrow (\underset{\sim}{Y} - X\hat{\underline{\beta}})'\underset{\sim}{\hat{Y}} = 0$$

$$\Rightarrow (\underset{\sim}{Y} - \underset{\sim}{\hat{Y}})'\underset{\sim}{\hat{Y}} = 0$$

$$\Rightarrow (Y_1 - \hat{Y}_1, Y_2 - \hat{Y}_2, \ldots, Y_n - \hat{Y}_n) \begin{pmatrix} \hat{Y}_1 \\ \hat{Y}_2 \\ \vdots \\ \hat{Y}_n \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)\hat{Y}_i = 0.$$

β) Από θεωρία $Var(\underset{\sim}{\hat{Y}}) = Var(X\hat{\underline{\beta}}) = X\,Var(\hat{\underline{\beta}})X'$

$$= X(\sigma^2 (X'X)^{-1})X'$$

$$\Rightarrow Var(\underset{\sim}{\hat{Y}}) = \sigma^2 X(X'X)^{-1}X'.$$

$\sum_{i=1}^{n} Var(\hat{Y}_i) = tr\left[Var(\hat{Y})\right]$ όπου $Var(\underset{\sim}{\hat{Y}}) = \begin{pmatrix} Var(\hat{Y}_1) & & & \\ & Var(\hat{Y}_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & Var(\hat{Y}_n) \end{pmatrix}$

$$= tr\left[\sigma^2 X(X'X)^{-1}X'\right]$$

$$= \sigma^2 tr\left[\underbrace{X}_{n\times(p+1)} \underbrace{(X'X)^{-1}}_{(p+1)\times(p+1)} \underbrace{X'}_{(p+1)\times n}\right]$$

$n\times(p+1)\quad (p+1)\times n \quad n\times(p+1) \quad (p+1)\times n$

Θα Χρησιμοποιήσω Ιδιότητες Ίχνους

Για το ίχνος ισχύει: $tr(AB') = tr(A'B)$

$(AB^{-1})' = (B')^{-1}A'$.

$$= \sigma^2 tr\left(X'((X'X)^{-1}X')'\right)$$

$$= \sigma^2 tr\left(X'(X(X'X)^{-1})\right)$$

$$= \sigma^2 tr\left(\underset{(p+1)\times n}{X'}\underset{n\times(p+1)}{X}\underset{(p+1)\times n}{(X'X)^{-1}}\right) \quad n\times(p+1)$$

$$= \sigma^2 tr\left(I_{(p+1)\times(p+1)}\right)$$

$$= \sigma^2 \sum_{i=1}^{p+1} 1$$

$$= \sigma^2 (p+1).$$

SOS την συμπαθεί. (μπορεί να πέσει)

* Ασκ 11

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n \quad (*)$$

Με ε_i ικανοποιούν τις υποθέσεις.

Οι κανονικές εξισώσεις είναι:
$$\begin{cases} 10\hat{\beta}_0 + 2\hat{\beta}_1 - 6\hat{\beta}_2 = 4 \\ 2\hat{\beta}_0 + 2\hat{\beta}_1 = 6 \\ -6\hat{\beta}_0 + \ldots + 5\hat{\beta}_2 = 7 \end{cases}$$

α) Αν $n = 10$ και $\sum_{i=1}^{10} Y_i^2 = 107$

Να υπολογιστεί $\hat{\beta} = ?$ και MSres.

β) F-τεστ. $H_0: \beta_1 = 2\beta_2$

γ) Κατασκευή t-τεστ: $H_0: \beta_1 = 2\beta_2$.

Λύση

$$(*) \iff \underset{\sim}{Y} = X\underset{\sim}{\beta} + \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad \underset{\sim}{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \underset{\sim}{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \qquad \underset{n\times 3}{X} = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} \\ 1 & X_{21} & X_{22} \\ \vdots & & \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} \end{pmatrix}$$

α) Οι κανονικές εξισώσεις είναι της μορφής

$$(X'X)\hat{\underset{\sim}{\beta}} = X'\underset{\sim}{Y}, \qquad X'X = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -6 \\ 2 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$X'\underset{\sim}{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad (X'X)^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 10 & -10 & 12 \\ -10 & 14 & -12 \\ 12 & -12 & 16 \end{pmatrix}$$

(θα μου δίνει τον αντίστροφο αν μπει κάτι τέτοιο στην εξέταση.)

Άρα $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{y}$

$$= \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} \beta_0 &= 8 \\ \beta_1 &= -5 \\ \beta_2 &= 11 \end{aligned}$$

$$MS_{res} = \frac{SS_{res}}{n-p-1} = \frac{\underset{\sim}{y}'\underset{\sim}{y} - \hat{\underset{\sim}{\beta}}'X\underset{\sim}{y}}{10-2-1}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i^2 - (8 \; -5 \; 11)\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}}{7}$$

$$= \frac{107 - (8\cdot 4 - 5\cdot 6 + 11\cdot 7)}{7}$$

$$= \dots = 4.$$

β) F-test

Από τη θεωρία γνωρίζω το F-τεστ για τον έλεγχο της Γενικής Γραμμικής Υπόθεσης: $H_0: A\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{c}$ όπου γενικά A ένας $q\times(p+1)$ και $\underset{\sim}{c}$ $q\times 1$ διάνυσμα

Για τον έλεγχο της $H_0: A\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{c}$ η ΣΣΤ του τεστ είναι:

θα δίνεται

$$F = \frac{(A\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{c})'[A(X'X)^{-1}A']^{-1}(A\hat{\underset{\sim}{\beta}} - \underset{\sim}{c})}{SS_{res}} \; \frac{n-p-1}{q} \sim F_{q,\,n-p-1} \text{ υπό την } H_0$$

Και κ.π $F \geq F_{q,n-p-1,\alpha}$.

$$H_0: \beta_1 = 2\beta_2 \iff H_0 \; A\underset{\sim}{\beta} = \underset{\sim}{c} \text{ όπου } A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{array}, \quad C = 0$$

$$(0 \; 1 \; -2)\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0 \iff 0\cdot\beta_0 + \beta_1\cdot 1 - 2\beta_2 = 0$$

$$\boxed{\beta_1 = 2\beta_2}$$

Αντικαθιστώ στην F και βρίσκω το ζητούμενο γ) Για κατασκευή t-test ακολουθούμε την λογική του Wald δηλ. στηριζόμαστε σε εκτιμητή των παραμέτρων που εμφανίζονται στην H_0.

$H_0: \beta_1 = 2\beta_2 \iff H_0: \underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{\beta} = 0, \quad \underset{\sim}{c} = (0 \;\; 1 \;\; -2)'$

Θα στηριχτώ σε ένα εκτιμητή του $\underset{\sim}{\beta}$. Ποιον?

↓

στον ΕΕΤ ή ΕΜΠ

$\hat{\underset{\sim}{\beta}} = (X'X)^{-1}X'\underset{\sim}{Y}.$

Ξέρω $\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{pmatrix} \sim N_3\left(\begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \sigma^2 (X'X)^{-1}\right)$

Επομένως $\underbrace{\underset{\sim}{c}'\hat{\underset{\sim}{\beta}}}_{\text{Τυχαία μεταβλητή}} = \hat{\beta}_1 - 2\hat{\beta}_2 \sim N\left(\underset{\sim}{c}'\underset{\sim}{\beta} = \beta_1 - 2\beta_2, \; \sigma^2 \underbrace{\underset{\sim}{c}'(X'X)^{-1}\underset{\sim}{c}}_{15,75}\right)$

Υπό την $H_0: \beta_1 = 2\beta_2$ το $\underset{\sim}{c}'\hat{\underset{\sim}{\beta}} \sim N(0, \sigma^2 \cdot 15{,}75)$

$\Rightarrow \underset{\sim}{c}'\hat{\underset{\sim}{\beta}} = \hat{\beta}_1 - 2\hat{\beta}_2 \sim N(0, 15{,}75\sigma^2)$

$\Downarrow$

$\dfrac{\hat{\beta}_1 - 2\hat{\beta}_2}{\sqrt{15{,}75\,\sigma^2}} \sim N(0,1)$ υπό την H_0.

Αλλά $\dfrac{SS_{res}}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-p-1}$

Θεωρώ το

$$\frac{N(0,1)}{\sqrt{\chi^2_{n-p-1}/_{n-p-1}}} \sim \frac{\dfrac{\hat{\beta}_1 - 2\hat{\beta}_2}{\sqrt{15.75\,\sigma^2}}}{\sqrt{\left(\dfrac{SS_{res}}{\sigma^2}\right)/(n-p-1)}} = \frac{\hat{\beta}_1 - 2\hat{\beta}_2}{\sqrt{15{,}75\,MS_{res}}}$$

|| ανεξ $\hat{\underset{\sim}{\beta}}$, MS_{res}

t_{n-p-1}

Άρα για τον έλεγχο $H_0: \beta_1 = 2\beta_2$ η ΣΣΤ είναι $t = \dfrac{\hat{\beta}_1 - 2\hat{\beta}_2}{\sqrt{15{,}75\,MS_{res}}} \sim t_{n-p-1}$ υπό H_0

Κ.Π $|t| \geq t_{n-p-1, \alpha/2}$

αντικαθιστώ τις τιμές και συγκρίνω.

Βλέπω την άσκηση 20.

Για εξετάσεις: Κουμπιουτεραίκι

3 Θέματα με υποερωτήματα

(μοντελα παλινδρόμησης 6.5 με 7 μόρια)

↳ Θεωρητικά (πχ εκτιμητές αμερόληπτοι)

⊕

πρακτικά.

Θέμα

όπως άσκηση 11

Θέμα

αριθμητικό (με πίνακα ΑΝΑΔΙΑ)

(προσοχή στο τι θα δίνει)